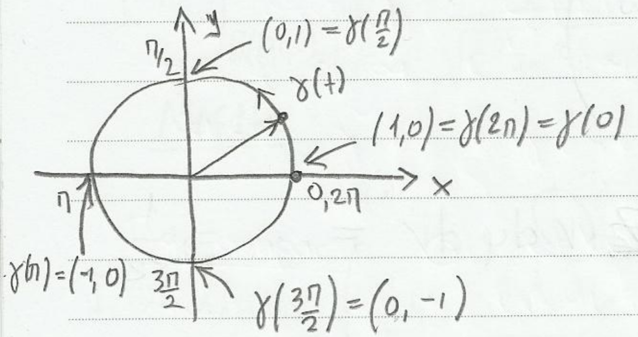
• ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ •

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, διάστημα ονομάζεται παραμετρική καμπύλη (με παράμετρο t) και η εικόνα $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται καμπύλη

Παράδειγμα:
Έστω $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ με εικόνα
$\gamma([0, 2\pi]) = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$



και ασφαλώς $\| \underbrace{\gamma(t)}_{\in \mathbb{R}^2} \| = 1$

Παρατήρηση: Μια καμπύλη ($\subseteq \mathbb{R}^n$) δεν έχει μοναδική παραμετρικοποίηση και η $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(vt), \sin(vt))$, $v > 0$, $t \in [0, \frac{2\pi}{v}]$ έχει την ίδια εικόνα με την γ

Προσοχή:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{με } \|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$$

$$\text{Ενώ } \tilde{\gamma}'(t) = v \cdot \begin{pmatrix} -\sin(vt) \\ \cos(vt) \end{pmatrix} \Rightarrow \|\tilde{\gamma}'(t)\| = v$$

Ορισμος: Μια παραμετρική $\gamma: I \to \mathbb{R}$ με $\gamma \in C^1(I)$ και εφαπτόμενο διανυσμα $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix}$ (το διανυσμα ταχυτητας) και ταχυτητα $\|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in I$ λεγεται κανονική καμπύλη (παραμετρική)

Ορισμος: Έστω $\gamma: [a, \beta] = I \to \mathbb{R}^n$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{P}([a,\beta])$ το συνολο των διαμεριστων
$P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_\nu = \beta\}$ (με $t_i < t_{i+1}$)
Τοτε η γ ονομάζεται ευθυγραμμίσιμη αν υπάρχει το μήκος της καμπύλης

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \right\}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΒΑΣΙΚΟΤΑΤΟ)

Μια C^1 καμπύλη $\gamma: [a, \beta] \to \mathbb{R}^n$ είναι ευθυγραμμίσιμη με μήκος $L(\gamma) = \int_a^\beta \|\gamma'(t)\| \, dt$

Παράδειγμα:

Το τόξο του μοναδιαίου κύκλου $\gamma: [0,\varphi] \to \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $\varphi > 0$ έχει μήκος
$L(\gamma) = \int_0^\varphi \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^\varphi \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \, dt = \varphi$
$\Rightarrow$ ο μοναδιαίος κύκλος έχει μήκος 2π αφου δίνεται από την παραμετρική καμπύλη $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$.

Προσοχή: Ο ορισμός του μήκους καμπύλης αφορά στε παραμετρικές καμπύλες οι οποίες δίνονται στη μορφή $\gamma: [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$. Συνεπώς, εαν αλλάξουν τα a, β τότε θα αλλάξει και το $\int_a^\beta \|\gamma'(t)\| \, dt = L(\gamma)$

πχ

η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi] \to L(\gamma) = 2\pi$
η $\tilde{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 4\pi] \to L(\tilde{\gamma}) = 4\pi$

Παρατήρηση: Αν η απεικόνιση $\gamma:[a,\beta]\to\mathbb{R}^n$ είναι 1-1 τότε η καμπύλη γ λέγεται απλή (πχ $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ $t\in[0,\pi]$ είναι απλή, ενώ η $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$ $t\in[0,2\pi]$ δεν είναι απλή, αφού $\gamma(0)=\gamma(2\pi)=(1,0)$)

Ορισμός: Έστω $\gamma:[a,\beta]\to\mathbb{R}^n$ και $\varphi:[A,B]\to[\alpha,\beta]$ μια 1-1 και επί συνάρτηση με φ,φ^{-1} είναι C^1 συναρτ. Τότε η φ λέγεται C^1-παραμετρικός μετασχηματισμός (ή διαφορομορφισμός) και λέμε ότι η καμπύλη $J=\gamma\circ\varphi:[A,B]\to\mathbb{R}^n$ προκύπτει απ' την γ μέσω του φ

Πχ

$$\gamma(t)=(\cos t,\sin t)\ ,\ t\in[0,2\pi]$$
$$\tilde{\gamma}(t)=(\cos(vt),\sin(vt))\ ,\ t\in\left[0,\frac{2\pi}{v}\right]\ ,\ v>0$$

Αν θέσουμε $\varphi(t)=vt$, $t\in\left[0,\frac{2\pi}{v}\right]$ το φ είναι C^1 παραμετρ. μετασχηματισμός και $\tilde{\gamma}(t)=\gamma(\varphi(t))=(\gamma\circ\varphi)(t)=J(t)$

Παρατήρηση: Οι εικόνες $\gamma([a,\beta])=J([A,B])$ είναι οι ίδιες (δηλ. καμπύλες), ενώ οι παραμετρ. όχι ίδιες

Ορισμός: Αν η φ αύξουσα συνάρτηση τότε λέμε ότι διατηρεί τον προσανατολισμό, ενώ αν είναι φθίνουσα τότε αντιστρέφει τον προσανατολισμό

Πρόταση: Έστω $\gamma:[a,\beta]\to\mathbb{R}^n$ C^1 και $\varphi:[A,B]\to[a,\beta]$, C^1 παραμετρ. μετασχ. Τότε για την $J=\gamma\circ\varphi:[A,B]\to\mathbb{R}^n$ ισχύει
$$L(J)=\int_A^B\|J'(\tau)\|\,d\tau=\int_A^B\|\gamma'(\varphi(\tau))\|\cdot|\varphi'(\tau)|\,d\tau$$
$$=\int_a^\beta\|\gamma'(t)\|\,dt=L(\gamma)$$